Durchbiegung eines Einfeldträgers unter Gleichstreckenlast

Filip Hokeš · 04.09.2026 · Version 1.2

Inhalt

1 Einleitung 1
2 Eingangsdaten und Parameterstudie 2
3 Berechnungsskript 3
4 Grafische Ergebnisse 4
5 Quelle vs. Ergebnis 4
6 Fazit 5

Čeština · English · Deutsch

Einleitung

Diese Studie behandelt die Durchbiegung eines Einfeldträgers mit der Spannweite L unter einer Gleichstreckenlast q. Ziel ist es, die geschlossene analytische Lösung mit einer numerischen Lösung nach dem Differenzenverfahren[1] zu vergleichen und zu zeigen, unter welchen Bedingungen die Bernoulli-Navier-Hypothese ausreicht. In den 1960er-Jahren las man solche Werte aus Tafeln ab; heute genügt ein Skript mit wenigen Dutzend Zeilen.

Die maximale Durchbiegung in Feldmitte beträgt

$$w_{\max} = \frac{5\,q\,L^4}{384\,E\,I}, \tag{1}$$

wobei E der Elastizitätsmodul und I das Flächenträgheitsmoment ist. Für Stahl gilt $E = 210\,\mathrm{GPa}$; Holz ist rund zehnmal weicher. Die Norm begrenzt die bezogene Durchbiegung $w_{\max}/L$ üblicherweise auf 1/250.

Formel (1) beruht auf der Bernoulli-Navier-Hypothese, die den Schubanteil der Durchbiegung vernachlässigt. Über dessen Größe entscheidet nicht die Schlankheit an sich, sondern das **Verhältnis von Biege- zu Schubsteifigkeit**: für Gleichlast gilt

$$\frac{w_{\mathrm{V}}}{w_{\mathrm{M}}} = \frac{qL^2/(8\,G\,A_{\mathrm{s}})}{5\,q\,L^4/(384\,E\,I)} = 9{,}6\,\frac{E\,I}{G\,A_{\mathrm{s}}\,L^2}, \tag{2}$$

wobei G der Schubmodul und A_{s} die Schubfläche ist. Erst beim homogenen Rechteckquerschnitt vereinfacht sich der Ausdruck zu $\approx 2{,}5\,(h/L)^2$ — für $h/L = 1/20$ macht der Schubanteil also etwa 0,6 % aus, woher die bekannte Schlankheitsfaustregel stammt. Bei Querschnitten mit kleinem $G\,A_{\mathrm{s}}$ — z. B. Sandwich-, dünnwandigen oder Verbundprofilen — kann der Schub jedoch auch bei sehr schlanken Trägern relevant sein, d. h. die Timoshenko-Theorie ist dann angebracht.

Eingangsdaten und Parameterstudie

Tab. 1 fasst eine Parameterstudie mit 36 Kombinationen aus Spannweite und Last zusammen. Sie läuft absichtlich über eine Seite, um die Wiederholung des Tabellenkopfs im Druck zu prüfen.

Tab. 1: Parameterstudie der Durchbiegung — 36 Kombinationen aus Spannweite und Last

Nr.	L [m]	q [kN/m]	E [GPa]	I [10⁻⁶ m⁴]	w_max [mm]	w/L [–]
1	3,0	5,0	210	83,3	0,60	1/4970
2	3,0	10,0	210	83,3	1,21	1/2485
3	3,0	15,0	210	83,3	1,81	1/1657
4	3,5	5,0	210	83,3	1,12	1/3133
5	3,5	10,0	210	83,3	2,23	1/1567
6	3,5	15,0	210	83,3	3,35	1/1044
7	4,0	5,0	210	83,3	1,90	1/2100
8	4,0	10,0	210	83,3	3,81	1/1050
9	4,0	15,0	210	83,3	5,71	1/700
10	4,5	5,0	210	83,3	3,05	1/1475
11	4,5	10,0	210	83,3	6,10	1/738
12	4,5	15,0	210	83,3	9,15	1/492
13	5,0	5,0	210	83,3	4,65	1/1075
14	5,0	10,0	210	83,3	9,30	1/538
15	5,0	15,0	210	83,3	13,95	1/358
16	5,5	5,0	210	83,3	6,81	1/808
17	5,5	10,0	210	83,3	13,62	1/404
18	5,5	15,0	210	83,3	20,43	1/269
19	6,0	5,0	210	83,3	9,64	1/622
20	6,0	10,0	210	83,3	19,28	1/311
21	6,0	15,0	210	83,3	28,93	1/207
22	6,5	5,0	210	83,3	13,29	1/489
23	6,5	10,0	210	83,3	26,57	1/245
24	6,5	15,0	210	83,3	39,86	1/163
25	7,0	5,0	210	83,3	17,86	1/392
26	7,0	10,0	210	83,3	35,71	1/196
27	7,0	15,0	210	83,3	53,57	1/131
28	7,5	5,0	210	83,3	23,54	1/319

Nr.	L [m]	q [kN/m]	E [GPa]	I [10⁻⁶ m⁴]	w_max [mm]	w/L [–]
29	7,5	10,0	210	83,3	47,08	1/159
30	7,5	15,0	210	83,3	70,62	1/106
31	8,0	5,0	210	83,3	30,48	1/262
32	8,0	10,0	210	83,3	60,95	1/131
33	8,0	15,0	210	83,3	91,43	1/87
34	8,5	5,0	210	83,3	38,84	1/219
35	8,5	10,0	210	83,3	77,68	1/109
36	8,5	15,0	210	83,3	116,52	1/73

Spannweiten über 8,0 m verletzen den Grenzwert 1/250 deutlich und verlangen einen höheren Querschnitt oder eine Überhöhung.

Berechnungsskript

Die analytische Lösung wird durch das folgende Skript geprüft. Die Zeilen sind absichtlich lang, um den Zeilenumbruch im Druck zu testen.

```
"""Durchbiegung des Einfeldträgers: analytisch vs. numerisch (Differenzenverfahren)."""
import numpy as np

def analytische_loesung(L: float, q: float, E: float, I: float, n: int = 101) -> np.ndarray:
    """Biegelinie w(x) = q x (L^3 - 2 L x^2 + x^3) / (24 E I)."""
    x = np.linspace(0.0, L, n)
    return q * x * (L**3 - 2.0 * L * x**2 + x**3) / (24.0 * E * I)

def numerische_loesung(L: float, q: float, E: float, I: float, n: int = 101) -> np.ndarray:
    """Löst E I w'''' = q mit finiten Differenzen und w(0) = w(L) = 0, w''(0) = w''(L) = 0."""
    h = L / (n - 1)
    A = np.zeros((n, n)); b = np.full(n, q * h**4 / (E * I))
    for i in range(2, n - 2):
        A[i, i-2:i+3] = [1.0, -4.0, 6.0, -4.0, 1.0]
    A[0, 0] = A[n-1, n-1] = 1.0; b[0] = b[n-1] = 0.0          # w = 0 an den Auflagern
    A[1, 0:3] = [1.0, -2.0, 1.0]; b[1] = 0.0                  # w'' = 0 (Gelenk links)
    A[n-2, n-3:n] = [1.0, -2.0, 1.0]; b[n-2] = 0.0            # w'' = 0 (Gelenk rechts)
    return np.linalg.solve(A, b)

if __name__ == "__main__":
    L, q, E, I = 6.0, 10_000.0, 210e9, 83.3e-6
    w_a = analytische_loesung(L, q, E, I)
    w_n = numerische_loesung(L, q, E, I)
    print(f"analytisch w_max = {1000 * w_a.max():.3f} mm, numerisch w_max = {1000 * w_n.max():.3f} mm")
    print(f"relative Abweichung = {abs(w_n.max() - w_a.max()) / w_a.max():.2e}")
```

Grafische Ergebnisse

Die Biegelinien beider Lösungen zeigt Abb. 1.

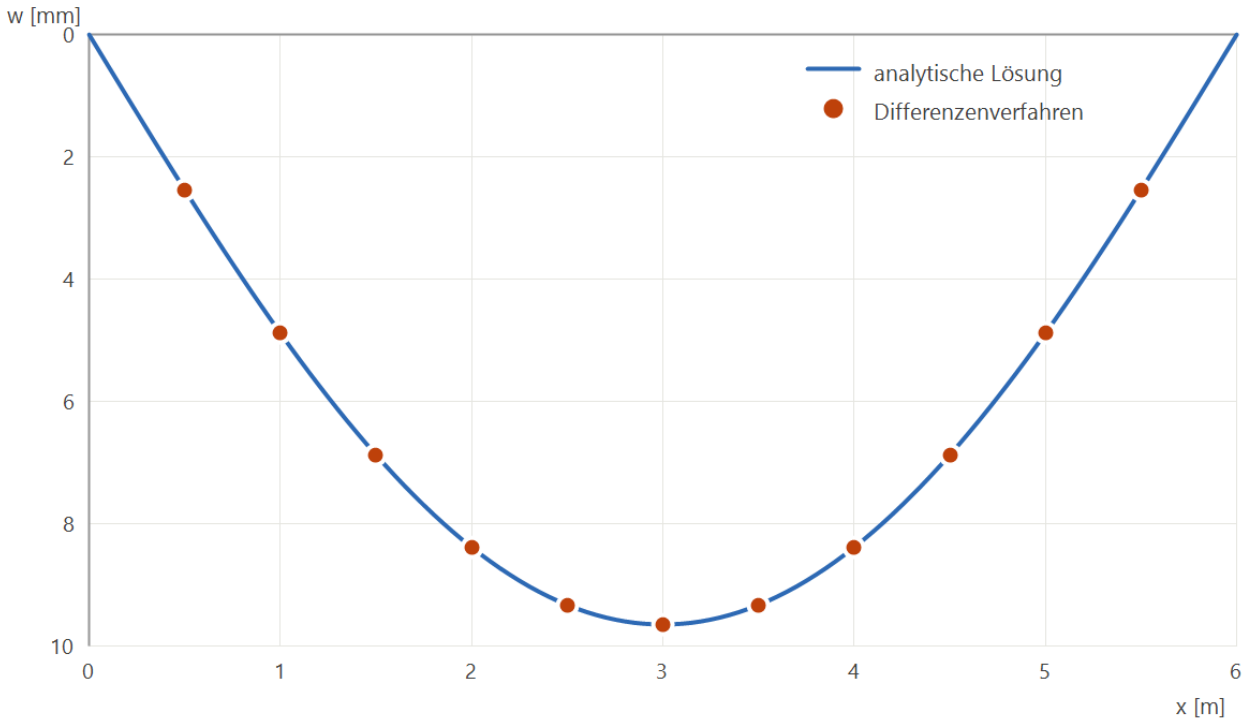


Abb. 1: Biegelinie — Vergleich der analytischen und numerischen Lösung

Das statische System (Abb. 2), gespeichert unter demselben Dateinamen in einem anderen Ordner:

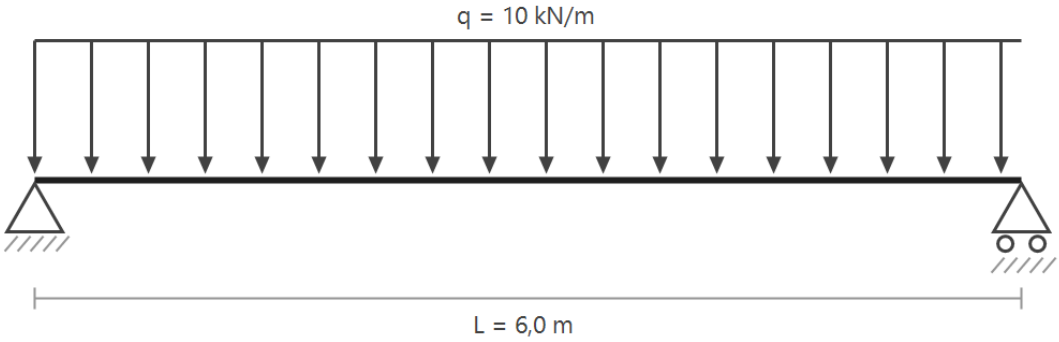


Abb. 2: Statisches System des Einfeldträgers

Quelle vs. Ergebnis

Dieses Dokument entstand aus reinem Markdown. Der folgende Block ist der wörtliche Quelltext (in Codeblöcken werden die typografischen Regeln absichtlich nicht angewendet):

```
Er sagte "die Spannweite beträgt 6 m" - d. h. auf S. 12 steht ein
Querschnitt 40x60 mm, geprüft am 1. 10. 2026 bei 25 °C... Vgl. Nr. 5.
```

Und so setzt mdprint denselben Text:

Er sagte „die Spannweite beträgt 6 m“ – d. h. auf S. 12 steht ein Querschnitt 40×60 mm, geprüft am 1. 10. 2026 bei 25 °C… Vgl. Nr. 5.

Der Unterschied liegt in den Details, die über die Lesbarkeit entscheiden: Gänsefüßchen, Gedankenstrich, geschützte Leerzeichen in Abkürzung, Datum und Einheit, echtes Malzeichen und Auslassungspunkte. Mathematik wird gesetzt; Code und Pfade bleiben unberührt.

Fazit

Die numerische Lösung weicht um weniger als 0,01 % von der analytischen ab, was beide Ansätze und Formel (1) bestätigt; der Schubanteil nach Gleichung 2 ist bei dieser Schlankheit vernachlässigbar. Die Beziehung $w(x) = \frac{q x (L^3 - 2Lx^2 + x^3)}{24EI}$ eignet sich daher für schnelle Nachweise[2]. Zum Abschluss eine Definition:

Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit
: Zustand, bei dessen Überschreitung das Tragwerk die Nutzungsanforderungen nicht mehr erfüllt, obwohl kein Versagen eintritt.

---

1. Differenzenverfahren (Methode der finiten Differenzen) — die Ableitungen der Differentialgleichung werden durch Differenzenquotienten auf einem regelmäßigen Netz ersetzt. Nicht zu verwechseln mit der Finite-Elemente-Methode, die eine Näherungslösung in schwacher Formulierung über Elementansatzfunktionen sucht. ↩

2. Ein Nachweis nach EN 1990 erfordert Lastkombinationen, die dieser Text der Kürze halber auslässt. ↩

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1 Biegelinie — Vergleich der analytischen und numerischen Lösung 4

Abb. 2 Statisches System des Einfeldträgers 4

Tabellenverzeichnis

Tab. 1 Parameterstudie der Durchbiegung — 36 Kombinationen aus Spannweite und Last 2