Průhyb prostě podepřeného nosníku za rovnoměrného zatížení

Filip Hokeš · 4. 9. 2026 · verze 1.2

Obsah

1 Úvod 1
2 Vstupní data a parametrická studie 2
3 Výpočetní skript 4
4 Grafické výsledky 5
5 Zdroj vs. výsledek 6
6 Závěr 6

Čeština · English · Deutsch

Úvod

Tato studie se zabývá průhybem prostě podepřeného nosníku o rozpětí L, zatíženého rovnoměrným spojitým zatížením q. Cílem je porovnat uzavřené analytické řešení s numerickým řešením metodou sítí[1] a ukázat, za jakých podmínek vystačíme s Bernoulliho–Navierovou hypotézou. V šedesátých letech 20. století se k výpočtu používaly tabulky, např. dle prof. Šmiřáka; dnes výpočet zvládne i skript o desítkách řádků.

Maximální průhyb uprostřed rozpětí je dán vztahem

$$w_{\max} = \frac{5\,q\,L^4}{384\,E\,I}, \tag{1}$$

kde E je modul pružnosti materiálu a I moment setrvačnosti průřezu. Pro ocel je typicky $E = 210\,\mathrm{GPa}$; u dřeva počítáme s hodnotou řádově desetkrát nižší. Poměrný průhyb $w_{\max}/L$ nemá dle normy překročit hodnotu $1/250$.

Vztah (1) plyne z Bernoulliho–Navierovy hypotézy, která zanedbává smykovou složku průhybu. O její velikosti nerozhoduje štíhlost sama o sobě, ale **poměr ohybové a smykové tuhosti**: pro rovnoměrné zatížení platí

$$\frac{w_{\mathrm{V}}}{w_{\mathrm{M}}} = \frac{q L^{2}/(8\,G\,A_{\mathrm{s}})}{5\,q\,L^{4}/(384\,E\,I)} = 9{,}6\,\frac{E\,I}{G\,A_{\mathrm{s}}\,L^{2}}, \tag{2}$$

kde G je modul pružnosti ve smyku a A_{s} smyková plocha průřezu. Teprve u homogenního obdélníkového průřezu se výraz zjednoduší na $\approx 2{,}5\,(h/L)^{2}$, takže pro $h/L = 1/20$ činí smyková složka asi 0,6 % — odtud pochází zažité pravidlo o štíhlosti. U sendvičových, tenkostěnných či kompozitních průřezů s nízkým $G\,A_{\mathrm{s}}$ však může být smyk významný i u velmi štíhlého nosníku a je namístě Timoshenkova teorie.

Vstupní data a parametrická studie

Výsledky parametrické studie pro 36 kombinací rozpětí a zatížení shrnuje Tab. 1. Tabulka záměrně přesahuje jednu stránku, aby ověřila opakování hlavičky při tisku.

Tab. 1: Parametrická studie průhybu — 36 kombinací rozpětí a zatížení

č.	L [m]	q [kN/m]	E [GPa]	I [10⁻⁶ m⁴]	w_max [mm]	w/L [–]
1	3,0	5,0	210	83,3	0,60	1/4970
2	3,0	10,0	210	83,3	1,21	1/2485
3	3,0	15,0	210	83,3	1,81	1/1657
4	3,5	5,0	210	83,3	1,12	1/3133
5	3,5	10,0	210	83,3	2,23	1/1567
6	3,5	15,0	210	83,3	3,35	1/1044
7	4,0	5,0	210	83,3	1,90	1/2100
8	4,0	10,0	210	83,3	3,81	1/1050
9	4,0	15,0	210	83,3	5,71	1/700
10	4,5	5,0	210	83,3	3,05	1/1475
11	4,5	10,0	210	83,3	6,10	1/738
12	4,5	15,0	210	83,3	9,15	1/492
13	5,0	5,0	210	83,3	4,65	1/1075
14	5,0	10,0	210	83,3	9,30	1/538

č.	L [m]	q [kN/m]	E [GPa]	I [10⁻⁶ m⁴]	w_max [mm]	w/L [–]
15	5,0	15,0	210	83,3	13,95	1/358
16	5,5	5,0	210	83,3	6,81	1/808
17	5,5	10,0	210	83,3	13,62	1/404
18	5,5	15,0	210	83,3	20,43	1/269
19	6,0	5,0	210	83,3	9,64	1/622
20	6,0	10,0	210	83,3	19,28	1/311
21	6,0	15,0	210	83,3	28,93	1/207
22	6,5	5,0	210	83,3	13,29	1/489
23	6,5	10,0	210	83,3	26,57	1/245
24	6,5	15,0	210	83,3	39,86	1/163
25	7,0	5,0	210	83,3	17,86	1/392
26	7,0	10,0	210	83,3	35,71	1/196
27	7,0	15,0	210	83,3	53,57	1/131
28	7,5	5,0	210	83,3	23,54	1/319
29	7,5	10,0	210	83,3	47,08	1/159
30	7,5	15,0	210	83,3	70,62	1/106
31	8,0	5,0	210	83,3	30,48	1/262
32	8,0	10,0	210	83,3	60,95	1/131
33	8,0	15,0	210	83,3	91,43	1/87
34	8,5	5,0	210	83,3	38,84	1/219
35	8,5	10,0	210	83,3	77,68	1/109
36	8,5	15,0	210	83,3	116,52	1/73

Výsledky pro rozpětí nad 8,0 m poměrný průhyb 1/250 zjevně nesplňují a vyžadují buď vyšší průřez, nebo nadvýšení.

Výpočetní skript

Analytické řešení ověřuje následující skript. Řádky jsou záměrně dlouhé, aby prověřily zalamování kódu při tisku.

```
"""Průhyb prostě podepřeného nosníku: analyticky vs. numericky
  (metoda sítí)."""
import numpy as np

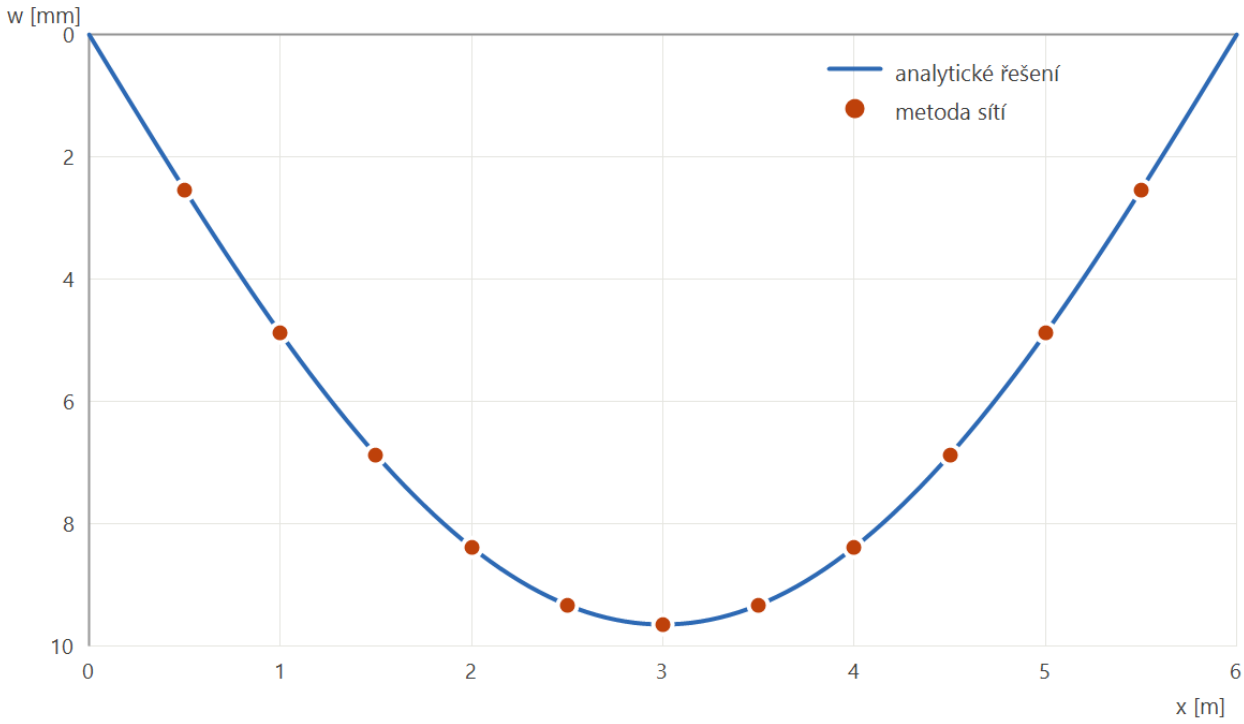
def analyticke_reseni(L: float, q: float, E: float, I: float, n: int
  = 101) -> np.ndarray:
    """Vrátí průhybovou čáru w(x) dle vztahu w(x) = q x (L^3 - 2 L
  x^2 + x^3) / (24 E I)."""
    x = np.linspace(0.0, L, n)
    return q * x * (L**3 - 2.0 * L * x**2 + x**3) / (24.0 * E * I)

def numericke_reseni(L: float, q: float, E: float, I: float, n: int =
  101) -> np.ndarray:
    """Řeší E I w'''' = q metodou sítí s okrajovými podmínkami w(0) =
  w(L) = 0, w''(0) = w''(L) = 0."""
    h = L / (n - 1)
    A = np.zeros((n, n)); b = np.full(n, q * h**4 / (E * I))
    for i in range(2, n - 2):
        A[i, i-2:i+3] = [1.0, -4.0, 6.0, -4.0, 1.0]
    A[0, 0] = A[n-1, n-1] = 1.0; b[0] = b[n-1] = 0.0          # w = 0
  v podporách
    A[1, 0:3] = [1.0, -2.0, 1.0]; b[1] = 0.0                   # w''
  = 0 (kloub vlevo)
    A[n-2, n-3:n] = [1.0, -2.0, 1.0]; b[n-2] = 0.0             # w''
  = 0 (kloub vpravo)
    return np.linalg.solve(A, b)

if __name__ == "__main__":
    L, q, E, I = 6.0, 10_000.0, 210e9, 83.3e-6
    w_a = analyticke_reseni(L, q, E, I)
    w_n = numericke_reseni(L, q, E, I)
    print(f"analyticky w_max = {1000 * w_a.max():.3f} mm, numericky
  w_max = {1000 * w_n.max():.3f} mm")
    print(f"relativní odchylka = {abs(w_n.max() - w_a.max()) /
  w_a.max():.2e}")
```

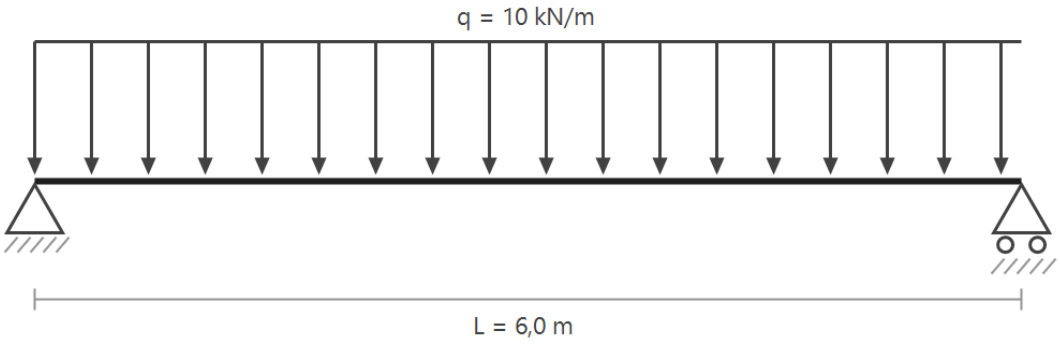
Grafické výsledky

Průhybové čáry obou řešení jsou vykresleny na Obr. 1.



Obr. 1: Průhybová čára — porovnání analytického a numerického řešení

Statické schéma úlohy (Obr. 2) se stejnojmenným souborem z jiné složky:



Obr. 2: Statické schéma prostě podepřeného nosníku

Zdroj vs. výsledek

Tento dokument vznikl z prostého Markdownu. Následující blok je doslovný zdrojový text (uvnitř bloku kódu se typografická pravidla záměrně neuplatňují):

```
Nosník o rozpětí 6 m nese zatížení 10 kN/m; průhyb w_max = 9,65 mm
"vyhoví" i pro mezní stav 1/250 - viz obr. 1. Teplotní rozsah 10-20
  °C,
plocha 40x60 mm, 1 000 000 cyklů, posudek dle ČSN EN 1990 s. 12.
Vzorec $w_{\max} = 5qL^4/(384EI)$ i cesta C:\data\vstup.md zůstávají
netknuté.
```

A takto tentýž text vysází mdprint:

Nosník o rozpětí 6 m nese zatížení 10 kN/m; průhyb w_max = 9,65 mm „vyhoví“ i pro mezní stav 1/250 – viz obr. 1. Teplotní rozsah 10–20 °C, plocha 40×60 mm, 1 000 000 cyklů, posudek dle ČSN EN 1990 s. 12. Vzorec $w_{\max} = 5qL^4/(384EI)$ i cesta `C:\data\vstup.md` zůstávají netknuté.

Rozdíl je v detailech, které rozhodují o čitelnosti sazby: české uvozovky, pomlčka místo spojovníku, en dash v rozsahu, znak násobení, úzká mezera v tisícových skupinách a nezlomitelné mezery za jednopísmennými předložkami, zkratkami i mezi číslem a jednotkou. Matematika se vysází, kód a cesty zůstanou beze změny.

Závěr

Numerické řešení se od analytického liší o méně než 0,01 %, což potvrzuje správnost obou přístupů i vztahu (1); smykový příspěvek dle rovnice 2 je u řešené štíhlosti zanedbatelný. Inline vztah $w(x) = \frac{qx(L^3 - 2Lx^2 + x^3)}{24EI}$ lze proto bez obav používat pro rychlé posouzení[2]. Definiční obor:

Mezní stav použitelnosti
: Stav, při jehož překročení přestává konstrukce plnit provozní požadavky, ačkoli nedochází k jejímu porušení.

1. Metoda sítí (metoda konečných diferencí) — derivace v diferenciální rovnici se nahradí diferenčními podíly na pravidelné síti uzlů. Nezaměňovat s metodou konečných prvků, která hledá přibližné řešení ve slabé formulaci nad bázovými funkcemi prvků. ↩

2. Posudek dle ČSN EN 1990 vyžaduje kombinace zatížení, které tento text pro stručnost vynechává. ↩

Seznam obrázků

Obr. 1 Průhybová čára — porovnání analytického a numerického řešení 5

Obr. 2 Statické schéma prostě podepřeného nosníku 5

Seznam tabulek

Tab. 1 Parametrická studie průhybu — 36 kombinací rozpětí a zatížení 2